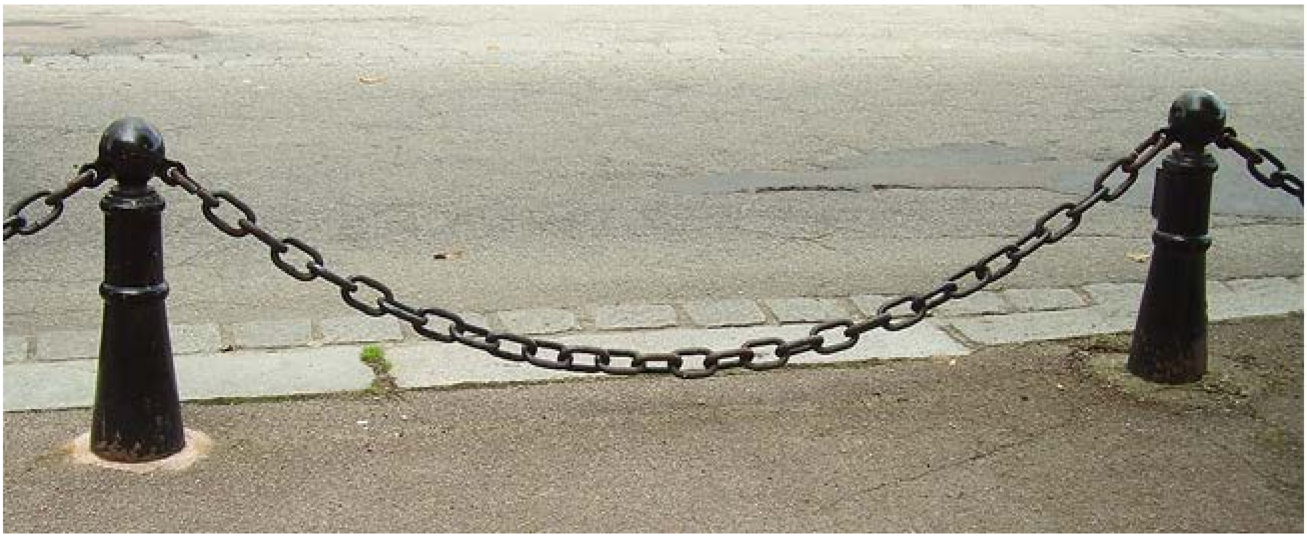
Идея этой методички мне пришла после постов «вариационка, как интуры, нигде не нужна». Она позволяет решать многие задачи механики. Посмотрим, какие именно.

Рассмотрим задачу. Перед нами нерастяжимая цепь.
Она закреплена между концами, свисая между ними:



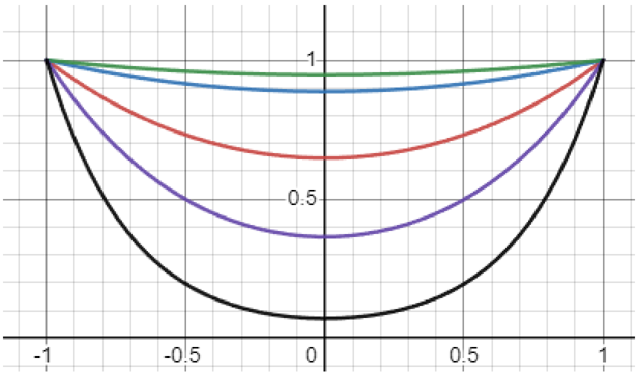
Было бы между ними расстояние l, то она бы была бы натянута, как струна. А она провисает. Вот это линия, по которой она провисает – что за линия?

Это не парабола, как может показаться, а чосинус. Как это доказать?
Это очень известная задача. Её можно решение, например, посмотреть здесь
https://dzen.ru/a/Yeg9W7g6OVCHP4ws

Решение удобно записать как

$$y(x) = \frac{ch\left(\frac{x}{c}\right)}{ch\left(\frac{1}{c}\right)}$$

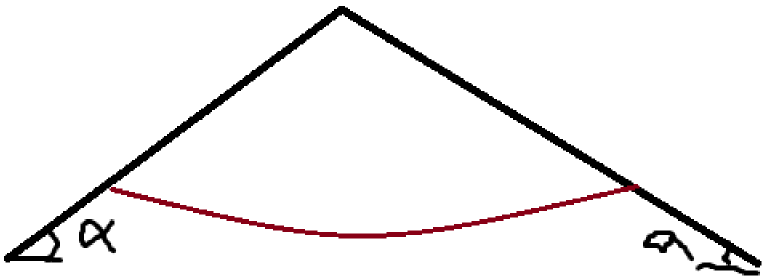
Оно описывает цепную линию, подвешенную между точками (-1,1) и (1,1).
Поиграйтесь в Десмосе: https://www.desmos.com/calculator/wgptoakxk7



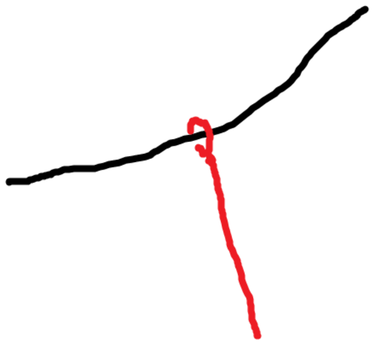
Подвижные границы. Условия трансверсальности

Рассмотрим ещё одну задачу – уже не баянную, а иллюстрирующую полезную теорию от кафмата.

Теперь концы не фиксированы, а могут скользить вдоль прямых, наклоненных под углом α к горизонтали:



Оба конца не закреплены! Концы цепи могут скользить:



Хорошо, что у кафмата на этот случай есть теория – условия трансверсальности.

Обратимся к базе:

Рассмотрим функционал $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$, заданный на кривых $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, граничные точки которых $A(x_0,y_0)$ и $B(x_1,y_1)$ в свою очередь лежат на фиксированных гладких кривых $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, так что $y_0=\varphi(x_0)$, $y_1=\psi(x_1)$.

Задача с подвижными границами ставится так: среди всех функций $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, графики которых соединяют точки двух данных кривых $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $V[y]$. Отметим, что абсциссы x_0 и x_1 точек A и B заранее не известны, и также подлежат определению.

Необходимые условия экстремума. Для того, чтобы функция $y=\tilde{y}(x)$ доставляла экстремум функционалу $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$ среди всех кривых $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, соединяющих точки двух заданных линий $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, необходимо, чтобы:

1) кривая $y=\tilde{y}(x)$ была решением уравнения Эйлера для функционала $V[y]$ (являлась экстремалью),

2) в точках $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ пересечения экстремали $y = \tilde{y}(x)$ с кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ выполнялись условия трансверсальности

$$[F + (\varphi' - \tilde{y}')F_{y'}]_{x=x_0} = 0,$$
$$[F + (\psi' - \tilde{y}')F_{y'}]_{x=x_1} = 0.$$

Условия трансверсальности устанавливают связь между угловыми коэффициентами кривых $\tilde{y}'$ и φ', а также $\tilde{y}'$ и ψ' в граничных точках A и B.

Для определения четырех параметров - C_1, C_2 из общего решения уравнения Эйлера и значений x_0, x_1 (координат концов экстремали) - два условия трансверсальности нужно дополнить двумя естественными условиями пересечения заданных кривых и искомой экстремали $\tilde{y}(x_0) = \varphi(x_0)$, $\tilde{y}(x_1) = \psi(x_1)$.

Замечание 1. Если граничная точка (пусть точка A) может перемещаться только по горизонтальной прямой $y = x_0$ (т.е. $\varphi' = 0$), то условие трансверсальности в точке $A(x_0, y_0)$ принимает вид $[F - y'F_{y'}]_{x=x_0} = 0$.

Замечание 2. Если граничная точка (например, точка B) может перемещаться только по вертикальной прямой $x = x_1$ (т.е. $\psi' = \infty$), то такая задача называется *задачей со свободным концом*, и условие трансверсальности при $x = x_1$ в этом случае принимает вид $F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0$.

Введём систему координат как на рисунке
тогда точка x_0,y_0 скользит по прямой $y_0 = -kx_0$, а тогда точка x_1,y_1 скользит по прямой $y_1 = kx_1$. Следовательно, φ(x)=-ky, Ψ(x)=ky.

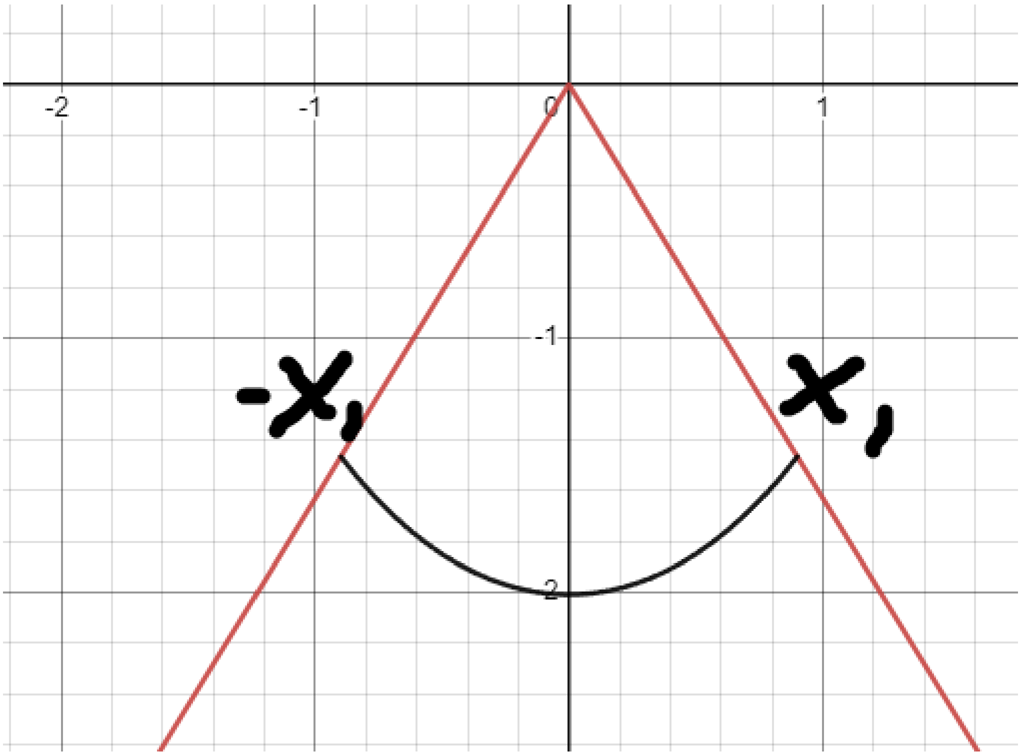
Из симметрии сразу видно, что $y_0 = y_1$, $-x_0 = x_1$, так что условие трансвельсаности запишем только справа:

$$[F + (\psi' - \tilde{y}')F_{y'}]_{x=x_1} = 0.$$

Ψ^I есть k, поэтому

$F + (k - y^I)F_{y^I} = 0$ в точке x_I

$y(x) = ch\left(\frac{x}{C}\right) - ch\left(\frac{x_1}{C}\right) - kx_1$ - заготовка под решение. Оно содержит точку стыка цепной линии и двух лучей x_1, которую нам предстоит найти.
https://www.desmos.com/calculator/q58mhuwdq0



$$F(x, y, y^I) = y\sqrt{1 + {y^I}^2}$$

$$y(x) = ch\left(\frac{x}{C}\right) - ch\left(\frac{x_1}{C}\right) - kx_1$$

Подставляем в условие трансверсальности:

$$F + (-k - y^I)F_{y^I} = 0 \text{ в точке } x_I$$

$$y\sqrt{1 + {y^I}^2} + (-k - y^I) * y\frac{y^I}{\sqrt{1 + {y^I}^2}} = 0 \text{ в точке } x_1$$

Подставляем $y = -kx_1$ и $y^I|_{x=x_1} = \frac{d}{dx}\left(ch\left(\frac{x}{C}\right) - ch\left(\frac{x_1}{C}\right) - kx_1\right)|_{x=x_1} = \frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}$

$$(-kx_1)\sqrt{1 + \left(\frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}\right)^2} + \left(-k - \frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}\right) * (-kx_1)\frac{\frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}}{\sqrt{1 + \left(\frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}\right)^2}} = 0$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}\right)^2} + \left(-k - \frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}\right) * \frac{\frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}}{\sqrt{1 + \left(\frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C}\right)^2}} = 0$$

$$\frac{sh\left(\frac{x_1}{C}\right)}{C} = z$$

$$\sqrt{1+z^2} + (-k - z) * \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = 0$$

$$1 + z^2 + (-k - z) * z = 0$$

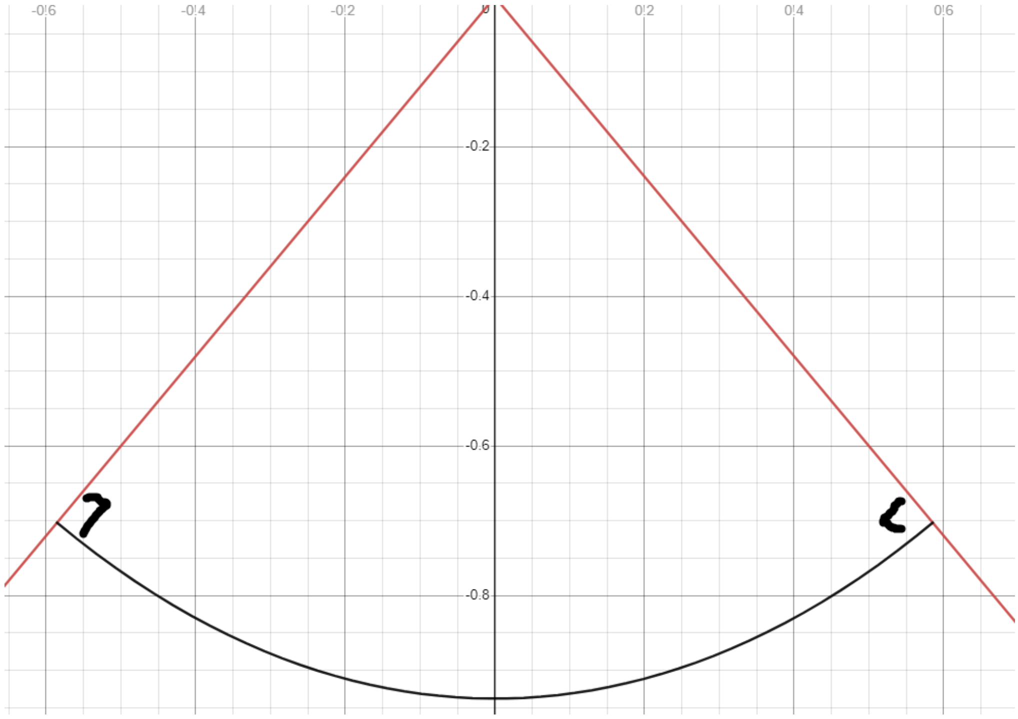
$$1 - kz = 0$$

$$z = \frac{1}{k}$$

$$sh\left(\frac{x_1}{C}\right) = \frac{C}{k}$$

$$x_1 = Carscsh\left(\frac{C}{k}\right)$$

Проверим:
https://www.desmos.com/calculator/cxcwejrvuc
Судя по тому, что цепь в точках касания ортогональна подвесу:



решение было найдено верно! Вот вам и применение трансверсальных условий в физике.

В заключение хотелось бы сказать, что все эти выкладки имеют практическое применение в геймдеве, где приходится прорисовывать свисающие цепи: https://habr.com/ru/articles/554414/